

Računarska grafika

Bezjeove krive



Bezjeove krive

- Bezjeova kriva – funkcija u parametarskom obliku
- Koristi se za modelovanje glatkih krivih linija
- Priroda - krivolinijski segment
 - između 2 zadate krajnje tačke
 - krajnje tačke pripadaju krivoj
 - kontrolisan proizvoljnim brojem kontrolnih tačaka
 - kontrolne tačke “privlače” liniju, linija ne prolazi kroz njih
- Kriva se zadaje vektorski (nizom kontrolnih tačaka)
 - kontrolne tačke – krajnje i privlačeće
 - pogodnost za skaliranje i druge geometrijske transformacije

Primena Bezeovih krivih

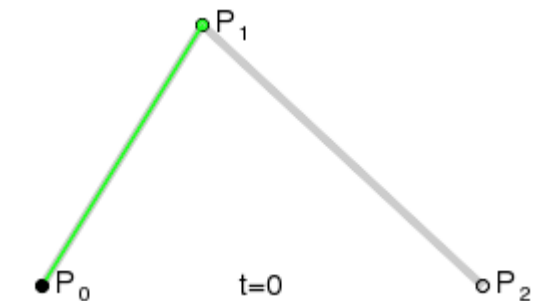
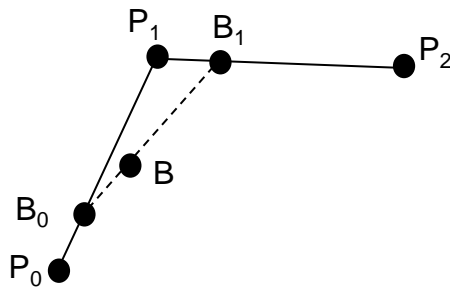
- Atraktivan metod crtanja krivih za različite aplikacije
 - projektantski CAD i CAM alati
 - editori vektorskih (takozvanih *True Type*) fontova
 - grafički dizajnerski programi (npr. *Inkscape*, *Adobe Photoshop*)
- Koriste ih i formati za opis vektorske grafike
 - *Scalable Vector Graphics (SVG)*
 - *True/OpenType* fontovi (tff/otf)
- Koriste ih grafički paketi (API-ji)
 - *JavaFX*

Istorijat

- Automobilska industrija – glavni pokretač razvoja crtanja krivih linija i krivih površi na računaru
- Algoritam crtanja razvio Pol d Kastelžo (*Paul de Casteljau*) 1959.
 - radio za Citroen (*Citroën*),
 - objavio tek 1975. godine
- Nezavisno – algoritam razvio Pijer Bezje (*Pierre Bézier*), 1962
 - radio za Reno (*Renault*)
 - algoritam nazvan po njemu, jer ga je prvi publikovao
- Algoritam koristi Bernštajnove (*Bernstein*) polinome
 - Bernštajnovi polinomi su poznati od 1912. godine

Kvadratna Bezejeova kriva

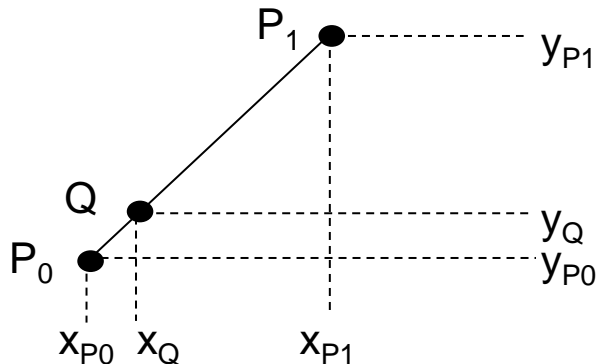
- Tri kontrolne tačke ukupno: P_0 , P_1 , P_2 (čine kontrolni mnogougao)
 - samo jedna kontrolna privlačeća tačka P_1
- Kriva se definiše se kao geometrijsko mesto tačaka B
 - B je linearna interpolaciju između dve tačke B_0 i B_1
 - B_0 je linearna interpolacija između P_0 i P_1
 - B_1 je linearna interpolacija između P_1 i P_2



By Phil Tregoning - Created using ImageMagick

Izvođenje – linearna interpolacija

- Posmatra se pravolinijski segment P_0 i P_1 i tačka Q na njemu:

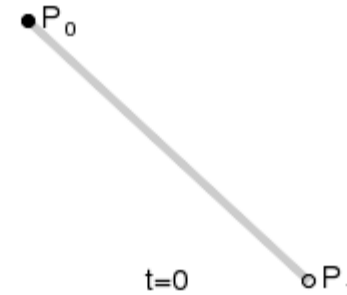


- U (skalarnom) parametarskom obliku:

$$x_Q(t) = x_{P_0} + t(x_{P_1} - x_{P_0}) = tx_{P_1} + (1-t)x_{P_0}$$

$$y_Q(t) = y_{P_0} + t(y_{P_1} - y_{P_0}) = ty_{P_1} + (1-t)y_{P_0}$$

- Parametar t predstavlja udeo duži P_0Q u duži P_0P_1 ; $t \in [0,1]$
- U vektorskom parametarskom obliku:
 $Q(t) = tP_1 + (1-t)P_0$, za $t \in [0,1]$



By Phil Tregoning - Created using ImageMagick

Izvođenje za kvadratnu krivu

- Ako su:
 - P_0 vektor početne tačke (x_0, y_0) krive
 - P_1 vektor kontrolne privlačće tačke (x_1, y_1)
 - P_2 vektor krajnje tačke (x_2, y_2) krive
- Interpolirane tačke $B_0(t)$ na duži P_0P_1 i $B_1(t)$ na duži P_1P_2 su:
 - $B_0(t) = tP_1 + (1-t)P_0$, za $t \in [0, 1]$
 - $B_1(t) = tP_2 + (1-t)P_1$, za $t \in [0, 1]$
- Interpolacijom između B_0 i B_1 dobija se tačka B na Bezejevoj krivoj:
 - $B(t) = tB_1 + (1-t)B_0$
 - $B(t) = t[tP_2 + (1-t)P_1] + (1-t)[tP_1 + (1-t)P_0]$
 - $B(t) = (1 - 2t + t^2)P_0 + (2t - 2t^2)P_1 + t^2P_2$

$$B(t) = (1 - t)^2P_0 + 2t(1 - t)P_1 + t^2P_2, \text{ za } t \in [0, 1]$$

Matrični oblik kvadratne krive

- Vektorski oblik:

$$B(t) = (1-t)^2 \cdot P_0 + 2t(1-t) \cdot P_1 + t^2 \cdot P_2, \text{ za } t \in [0,1]$$

- Matrični oblik:

$$B(t) = \begin{bmatrix} (1-t)^2 & 2t(1-t) & t^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-2t+t^2 & 0+2t-2t^2 & 0+0t+t^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}$$

$$B(t) = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}$$

Kubna Bezejeova kriva

- U vektorskom parametarskom obliku:

$$B(t) = (1-t)^3 \cdot P_0 + 3t(1-t)^2 \cdot P_1 + 3t^2(1-t) \cdot P_2 + t^3 \cdot P_3, \text{ za } t \in [0,1]$$

- U matričnom obliku:

$$B(t) = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}$$

Bezjeova kriva n-tog stepena

- Bezjeova kriva proizvoljnog stepena u vektorskom obliku:

$$B(t) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i P_i, \quad t \in [0,1]$$

ili:

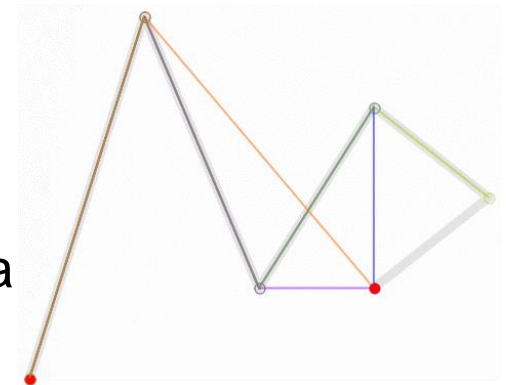
$$B(t) = \sum_{i=0}^n b_{i,n}(t) P_i, \quad t \in [0,1]$$

gde je $b_{i,n}(t)$ Bernštajnov polinom n-tog stepena

$$b_{i,n}(t) = \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i$$

a $\binom{n}{i}$ binomni koeficijent: $\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$

kriva 5. stepena



By Sam Derbyshire
at the English language Wikipedia,
CC BY-SA 3.0

Osobine

- Neprekidna, glatka kriva (diferencijabilna u svakoj tački)
- Na izgled krive utiču sve kontrolne tačke
- Početna i završna ivica kontrolnog mnogougla – tangente na krivu
 - prva ivica je tangenta na krivu u prvoj tački mnogougla P_0
 - poslednja ivica je tangenta na krivu u poslednjoj tački mnogougla P_n
- Kod kvadratne krive
 - tangente u početnoj P_0 i krajnjoj tački P_2 se seku u kontrolnoj tački P_1
 - kriva predstavlja segment parabole
- Kriva je unutar konveksnog omotača (*convex hull*) kontr. mnogougla
- Kriva može da se podeli na proizvoljno mnogo segmenata
 - od kojih je svaki Bezejeova kriva
- Kriva je prava ako i samo ako su sve kontrolne tačke kolinearne
- Generalizacija – Bezejeove površi

Splajnovi

- Splajn (*spline*) - kriva linija sastavljena iz polinomijalnih segmenata
 - kriva je glatka i na spojevima segmenata
 - oblikom se upravlja na osnovu kontrolnih tačaka i čvorova
- Naziv “splajn” - dugačka savitljiva šipka
 - za crtanje krivih linija na crtežima u prirodnoj veličini u brodogradnji
 - šipka se savija i u određenim tačkama fiksira "olovnim patkama" (*lead duck*)



- Kontrolna tačka – tačka privlačenja krive linije (u načelu - van linije)
- Čvor (*knot*) – tačka na osi parametra t
 - granica intervala vrednosti t u kojem pojedina kontrolna tačka ima uticaj
- Promena kontrolne tačke utiče lokalno na izgled krive

Vrste splajnova

- Kontinuitet krive u tački spoja
 - C0 – neprekidna kriva, spoj segmenata ne mora da bude gladak
 - C1 – prvi izvod kontinuiran, glatko povezivanje (nema „preloma“)
 - C2 – drugi izvod kontinuiran – kriva ima kontinuiranost krivine (krivina krive – brzina promene pravca tangente na krivu)
- Kubni B-splajn
 - ne prolazi kroz kontrolne tačke
 - kontrolne tačke utiču lokalno na krivu
 - neprekidna, glatka kriva, ima C2 kontinuitet
- Katmul-Romov splajn
 - prolazi kroz sve kontrolne tačke
 - neprekidna, glatka kriva, kontinuitet C1